MAOL ry:n pisteytyssuositus
PITKÄ MATEMATIIKKA Kevät 2004

1.

a) $f(-2)=3$	2
b) kunkin termin laskeminen	1
tulos $g\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{19}{8}$ tai $=2\frac{3}{8}$	-1
c) toisen asteen yhtälö $2x^2+3x-2=0$	1
juuret $\frac{1}{2}$ ja -2	1

2.

integraalifunktio x^2+3x	2
sijoituksen tulos $2a+4$	2
$2a+4=\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow a=-\dfrac{7}{4}$	2
----------	
integrointivirhe	0
sijoituksessa rajat väärin päin	max 3

3.

tulot = T	
vuokra ennen 0,25T, jälkeen $1{,}15\cdot 0{,}25T=0{,}2875T$	2
muut menot ennen 0,75T, jälkeen T - 0,2875T = 0,7125T tai vastaava	2
kysytty prosentti (0,75T - 0,7125T)/0,75T = 0,05 =5 %	2

T puuttuu eli käytetty tiettyä vuokrasummaa	-2
vertailuluku väärä	-2
pyöristetty liian aikaisin, tulos 5,3%	-1
laskettu pelkästään prosenttiluvuilla	max 2

4.

$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\bar{a}+\bar{b}\right)=-\frac{1}{2}\bar{i}+\frac{9}{2}\bar{j}$	2
$\overrightarrow{OP}=\bar{i}-\bar{j}$	1
$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\bar{i}+\frac{7}{2}\bar{j}$	1
$Q=\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$	2
----------	
kuvio, mutta ei vektorialgebrallisia laskuja	max 4
pelkkä oikea kuvio	1

5.

tangentin kulmakerroin $k = \tan 45^\circ = 1$ 1

$y' = 2x - 2$ 1

$2x - 2 = 1$ 1

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$ 1

$y = -\frac{15}{4}$ 1

piste $\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)$ 1

----

x- ja y-arvot riittävät, jos jotenkin ilmenee, että nämä ovat kysytyt koordinaatit; esim. alleviivaus on OK.

laskimessa radiaanit, $k \approx 1,6$ max 2

6.

maston korkeus h, vaakasuora etäisyys talosta x

kulmista saatavat ehdot, esim. $\frac{h+21-4}{x} = \tan 25^\circ, \frac{h+21-4-12}{x} = \tan 22,5^\circ$ 2

yhtälö h:lle, esim. $\frac{h+5}{h+17} = \frac{\tan 22,5^\circ}{\tan 25^\circ} = s\,(= 0,8882...)$ 2

$h = \frac{17s-5}{1-s} \approx 90,4\text{ m}$ 2

----

h:n lauseke oikein, väärä likiarvo -1

siirrytty liikaa pyöristettyihin likiarvoihin liian aikaisin max 4

oikea kuvio 1

7.

kateetit x ja y, hypotenuusan osat $3a$ ja $7a$

kateetti hypotenuusan ja hypotenuusalla olevan projektionsa

keskiverto $\frac{10a}{x} = \frac{x}{3a}, \frac{10a}{y} = \frac{y}{7a}$

TAI:

Pythagoras ja yhdenmuotoiset kolmiot: $x^2 + y^2 = 100a^2, \frac{3a}{x} = \frac{x}{10a}$ 2

$x = a\sqrt{30}, y = a\sqrt{70}$ 2

$x : y = \sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{3} : \sqrt{7} = \sqrt{21} : 7 = 3 : \sqrt{21}$ tai näiden käänteisluvut 2

----

a puuttuu -2

vastaus $\sqrt{30} : \sqrt{70}$ tai muu sieventämätön suhdeluku -1

laskettu kulmien kautta likiarvoilla max 3

8.

neliöksi täydentämällä $(x-1)^2+(y-2a)^2=1-2a-a^2$	2
a) $1-2a-a^2>0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{2}<a<-1+\sqrt{2}$	2
b) ala suurin, kun säde suurin, eli kun $a=-1$	1
suurin ala 2π (kun $r=\sqrt{2}$)	1
----------	
a:n rajat sieventämättä	-1
a:n rajat vastauksessa vain likiarvoina	-1
annettu a suljetulla välillä	-0

9.

voiton tn yhdellä arvalla $p=\frac{1}{20}$	1
tn, että ainakin yksi voitto n arvalla $q=1-(1-p)^n$	2
tästä ehto $q>0{,}5$ eli $0{,}95^n<0{,}5$	1
logaritmeilla tai systemaattisesti kokeilemalla ratkaisu	
$n=14$ tai $n\ge 14$	2
----------	
käsittely pelkästään yhtälönä	max 3
saa tarkastella myös yhtälöä $q=0{,}5$ (jonka ratkaisu on n = 13,513…), kunhan päättely tästä oikein.	
$\lg 0{,}95$:n etumerkki huomioimatta	max 4

10.

integrointi $f(x)=x+\ln(-x)+C$	2
sivuamiskohta $f'(x)=0 \Rightarrow x=-1$	1
$f(-1)=2 \Rightarrow C=3$	2
$f(x)=x+\ln(-x)+3$	1
----------	
vastauksessa $\ln\lvert x\rvert$	-1

11.

epäyhtälö muotoon $x\ln x-x+1\ge 0$	2
funktion $f(x)=x\ln x-x+1$ derivaatta $f'(x)=\ln x$	1
$x>1: f'(x)>0$ ja siis f kasvava, $f_{\min}=f(1)=0$	1
siis $f(x)\ge 0$ eli $x^x-e^{x-1}\ge 0$, yhtäsuuruus vain, kun $x=1$	2
----------	
todettu ainostaan, että arvolla $x=1$ yhtäsuuruus voimassa	1

12.

$I(k)=\sum_{n=0}^{k-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} 2^{-n}\sin x dx$ 2

$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} 2^{-n}\sin x\, dx = 2(-\tfrac{1}{2})^n$ 2

$I(k)=\sum_{n=0}^{k-1} 2(-\tfrac{1}{2})^n = \tfrac{4}{3}\left[1-(-\tfrac{1}{2})^k\right]$ 1

raja-arvo = $\tfrac{4}{3}$ 1

13.

a) $n=km, m=jn \Rightarrow n=jkn$ 1

$jk=1 \Rightarrow j=k=1 \vee j=k=-1$ 1

siis $m=\pm n$ 1

b) $n=km, p=jn \Rightarrow p=jkm$ 1

jk kokonaisluku, jolloin saadaan väite 2

----

a-kohdassa käytetty $k=j$ 0

verbaaliset selitykset max 3

tapauksen $n=0$ tarkastelua ei edellytetä.

14.

oikea esimerkki, esim. vakiojono 2

perustelu jonon suppenemiselle ja sarjan hajaantumiselle 2

jono ei voi hajaantua, jos sarja suppenee, sillä

$\sum x_k$ suppenee $\Rightarrow \lim x_k = 0$ 2

----

pelkkä vastaus 'ei' viimeiseen kohtaan ei tuo pisteitä

15.

$V'(t)=a\sqrt{h(t)}=a\sqrt{V(t)/(\pi r^2)}$ ts. saatu muotoa $V'(t)=2b\sqrt{V(t)}$

oleva diff.yhtälö 1

ratkaisu separoimalla $V(t)=(bt+C)^2$ 2

$V(0)=10, V(30)=5 \Rightarrow C=\sqrt{10}, b=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{10}}{30}$ 1

astia tyhjä, kun $bt+C=0$ eli $t=\dfrac{30\sqrt{10}}{\sqrt{10}-\sqrt{5}}\approx 102$ sekuntia 2